Caractéristique d'un anneau et extensions simples - TD 2

1. Si R est un anneau avec car$R = p$ où p est un nombre premier, alors
$$(a+b)^p = a^p + b^p \quad \text{et} \quad (a-b)^p = a^p - b^p$$
pour tous $a, b \in R$.

2. Si R est un anneau intègre avec car$R = p$ où p est un nombre premier, alors l'application (de Frobenius) $F : R \to R$, $a \mapsto a^p$ est un monomorphisme.

3. Trouver un exemple d'un corps infini de caractéristique positive.

4. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

5. Soit E/F et $a, b \in E$. Montrer que $F(a,b) = F(a)(b) = F(b)(a)$.

6. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que K est une extension simple de F. Montrer que K est une extension simple de E.

7. Soit E/F. Nous avons $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$.

8. Soit F un corps fini avec $|F| = q$, et soit E/F avec $[E : F] = n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que E est un corps fini avec $|E| = q^n$.

9. Si F est un corps fini, alors $|F| = p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, où $p = $ car$F$.

10. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $[K : F] = p$, où p est un nombre premier. Dans ce cas, soit $K = E$ soit $E = F$. De plus, K est une extension simple de F.

11. Soient $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ des corps, avec $n \geq 3$. Montrer que
$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$